MARKOV ZANJIRILARI UCHUN ERGODIK TEOREMA

Abduxakimov S. X.

JDPI umumiy matematika kafedrasi o`qituvchisi

Mamatov J.A

JDPI umumiy matematika kafedrasi o`qituvchisi

Esirgapov J

JDPI 2-magistranti

Anototsiya: Markov zanjiri deb atalgan jarayonlar birinchi marta 1906-1907- yillarda A.A. Markovning rus tilida yozilgan asarlarida uchraydigan unli va undosh harflar ketma-ketligining xossalarini o`rganishda bag`ishlanganishlarida ko`rilgan. Bu ishda Markov jarayonlarining muhim sinfi hisoblanadigan,holatlar fazosi chekli yoki sanoqli to`plamdan iborat bo`lgan, bir jinsli Markov zanjirlari bilan tanishamiz va ergodik teorema keltirilgan.

**Kalit so`zlar.** Markov zanjiri, Markov xossasi, boshlang`ich taqsimot, o`tish ehtimolliklar matritsasi,

Farz qilaylik tajriba bog`liqsiz ravishda $n$ marta takrorlansin. Agar 1-tajribaning natijasini $\omega_1$, 2-tajribaning natijasini $\omega_2$ , va xokazo. $n-$ nchi tajribaning natijasini $\omega_n$ deb belgilasak, bu tajribalar ketma-ketligining elementar xodisalar to`plami $\Omega = \left\{\omega;\ \omega = \left(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\right)\right\}$ bo`lib, bu yerda $\omega_i$ 1 yoki 0 teng bo`ladi. Agar ω elementar hodisa uchun

$$P(\omega) = p^{\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i} q^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i} \qquad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p$$

deb qabul qilsak, bu n ta tajribalar bog’liqsiz tajribalar ketma-ketligi bo`lisb va $p(\omega)$ funksiya ehtimolliklar taqsimotini beradi. Demak,

$$\left\{\omega_{i_1} = \delta_{i_1}, \ldots, \omega_{i_r} = \delta_{i_r},\ 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le n,\ r = 1, 2, \ldots, n\right\}$$

bog’liqsiz hodisalar sistemasi bo`ladi.([1]-[7])

Biz quyida, Markov zanjirlari orqali bog’liq bo`ladigan bog’liqlik tushunchasini kiritamiz. Bunda $\omega_n$ qanday qiymat qabul qilishi (xodisasi), $\omega_1,\dots,\omega_{n-2}$ larga bog’liq bo`lmasdan faqat undan oldingi ω_{n-1} ga bog’liq bo`ladi xolos va bu holat kiritilgan sxemani “zanjir” deb atalashini izohlaydi. Aytib o`tilganlarni tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi orqali tushuntirish ham qulay va matematika nuqtai nazaridan kat`iylik saqlanadi.

Aytaylik, tajriba natijasida $E_1, E_2, \dots, E_s$, $s \ge 2$ elementar hodisalardan bittasi ro`y bersin. Agar ekspirement bu tajribani $n$ marta takrorlashdan iborat bo`lsa elementar hodisalar to`plami

$$\Omega = \left\{\omega;\ \omega = \left(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\right)\right\}$$

s^n ta elementar ω hodisalardan tashkil topadi va bu yerda ω_i lar E_j lardan biriga teng bo`ladi. Endi $\{1, 2, \dots, s\}$ to`plamdan qiymatlar qabul qiladigan

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots \qquad (1)$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini kiratamiz:

$$P\left(x_0 = i\right) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad \sum_{i=1}^{s} p_i = 1,$$

va x_k tasodifiy miqdor i ga teng bo`ladi, agar $k-$nchi tajribada $E_i$ elementar hodisa ro`y bersa, ya`ni $x_k$ miqdor $k-$nchi tajribada ro`y bergan elementar hodisaning nomeriga teng bo`ladi. Aytilgan ma`noda

$$\left\{\omega;\ x_k(\omega) = i\right\}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

hodisani qiymatlari $(E_1,\dots,E_s)$ to`plamdan iborat bo`lgan qandaydir fizik sistema $k-$nchi momentda E_i xolatda bo`lishini anglatadi deb tushunish mumkin va shu ma`noda x_0 sistemaning boshlang'ich (0-nchi) holatiga mos keladi.

**Ta`rif**. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi (1) xolatlari $S=\{1,2,\dots,s\}$ bo`lgan Markov zanjiri deb ataladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1) $\sum_{i=1}^{s} P(x_k = i) = 1, \qquad k = 0,1,2,\dots,$

2) har qanday $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_r < m < n \ (r = 1,2,\dots), i,j \in S$ lar va S ning har qanday $B_1,\dots,B_r$ to`plam ostilari uchun

$$P\left(x_n = j / x_{t_1} \in B_1,\dots,x_{t_r} \in B_r, x_m = i\right) = P\left(x_n = j / x_m = i\right) \qquad (2)$$

Keltirilgan (2) tenglik (1) ketma-ketlik uchun Markov xossasi deb ataladi va o`rganilayotgan sistemaning berilgan $m$ momentdagi holati fiksirlangan bo`lsa, kelgusida ($n > m$) sistemaning holatlari o`zgarishi uning "o`tmishdagi" $\left(\xi_{t_1} \in B_1,\dots,\xi_{t_r} \in B_r\right)$ xolatlariga bog'liq emasligini bildiradi. Markov xossasi qisqa qilib aytganda, sistemaning "kelajagi", "xozirgi" xolati fiksirlangan bo`lsa, uning "o`tmishiga" bog'liq bo`lmasligini anglatadi. Bu yerda ham oldin eslatib o`tilganidek, $\left\{\omega; x_n(\omega) = i\right\}$, $i \in S$, $n = 0,1,\dots$xodisa sistemaning $n-$nchi momentda i holat bo`lishini belgilaydi. ([1]-[7])

Markov zanjiri bir jinsli deyiladi, agar har qanday $i,j \in S$ lar uchun

$$P\left(x_{n+1} = j / x_n = i\right) = p_{ij}, \qquad n = 0,1,2,\dots \qquad (3)$$

ehtimolliklar n ga bog'liq bo`lmasa.

Bu (3) tenglikdagi p_{ij} lar o`tish ehtimolliklari va ular tashkil qilgan matritsa

$$P = \left(p_{ij}\right)_1^s = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{s1} & \cdots & p_{ss} \end{pmatrix}$$

o`tishlar matritsasi deb ataladi. Bu matritsaning elementlari quyidagi shartni qanoatlantiradi:

$$p_{ij} \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, s. \qquad (4)$$

Elementlari (4) tengliklarni qanoatlantiradigan har qanday $P = \left(p_{ij}\right)_1^s$ matritsa ehtimolliklar nazariyasida stoxastik matritsalar deb ataladi.

Endi o`tish ehtimolliklari matritsasi $P$ va boshlang'ich ehtimolliklar deb ataluvchi $x_0$ tasodifiy miqdorning taqsimoti $p = \left(p_1, \ldots, p_s\right)$(1) tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini to`la aniqlashini isbotlaymiz. Buning uchun $\left(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\right)$ tasodifiy vektorning taqsimotini P va p larning elementlari orqali ifoda etish mumkinligini ko`rsatish yetarli bo`ladi. Haqiqatan ham shartli ehtimolliklar formulasiga asosan

$$P\left(x_0 = i_0, x_1 = i_1, x_2 = i_2, \ldots, x_{n-1} = i_{n-1}, x_n = i_n\right) =$$

$$= P\left(x_0 = i_0\right) \cdot P\left(x_1 = i_1 / x_0 = i_0\right) \times$$

$$\times P\left(x_2 = i_2 / x_0 = i_0,\ x_1 = i_1\right) \times \ldots$$

$$\ldots \times P\left(x_n = i_n / x_0 = i_0, x_1 = i_1, \ldots, x_{n-1} = i_{n-1}\right).$$

Bu yerda (2) tenglik bilan berilgan Markov xossasiga asosan $\left(i_k \in S\right)$

$$P\left(x_k = i_k / x_0 = i_0, x_1 = i_1, \ldots, x_{k-1} = i_{k-1}\right) =$$

$$P\left(x_k = i_k / x_{k-1} = i_{k-1}\right),\ k = 1, 2, \ldots. \qquad (5)$$

Markov zanjirining bir jinslilik xossasi (3) dan foydalanib, (5) tenglikning o`ng tomonidagi ehtimollik $p_{i_{k-1},i}$ ga teng ekanligini olamiz. Bularni va $p-$ boshlang'ich taqsimotning elementini hisobga olib, $x_0, x_1, \dots, x_n$ tasodifiy miqdorlarning birlashgan taqsimoti uchun quyidagi formulani olamiz:

$$P\left(x_0 = i_0, x_1 = i_1, \dots, x_n = i_n\right) =$$

$$p_{i_0} \cdot p_{i_0 i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1} i_n} \qquad (6)$$

O`z o`zidan ko`rinadiki, (5) tenglik (2) ning xususiy xoli va undan (6) tenglikni keltirib chiqardik. Aksincha (6) tenglikdan (2) (Markov xossasi) ham kelib chiqadi. Demak (2)- Markov xossasi (6) tenglikga teng kuchli bo`lar ekan. Ya`ni (6) formuladan kelib chiqadiki, $\omega = \left(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\right) \in \Omega$ elementar hodisaga

$$p(\omega) = p_{i_0} \cdot p_{i_0 i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1} i_n} \qquad i_k \in S,$$

ehtimollik yozilsa

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi Markov sxemasi bilan bog'liq bo`lgan tajribalar ketma-ketligini ifoda etadi. ([1]-[7])

Bir jinsli Markov zanjirlari uchun

$$P\left(x_{t+v} = j \,/\, x_v = i\right) = P\left(x_t = j \,/\, x_0 = i\right), \; i, j \in S, \qquad (7)$$

o`rinli ekanligiga ishonish qiyin emas. (bunda ham (6) formuladan foydalanish yetarli bo`ladi).

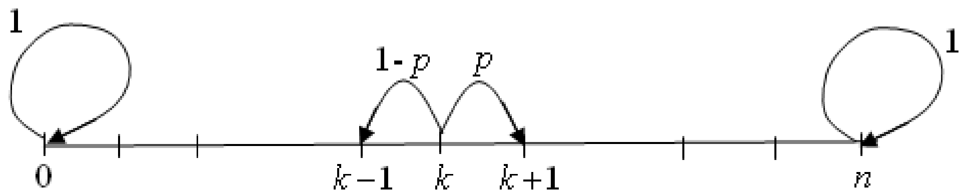
(7) tenglikdagi ehtimollik v ga bog'liq bo`lmagani uchun

$$P\left(x_{t+v} = j \,/\, x_v = i\right) = P_{ij}(t) \qquad (8)$$

Bu $P_{ij}(t),\ i,j \in S$, ehtimolliklarni t qadamda i holatdan j holatga o`tish ehtimolliklari deyiladi ($t = 0,1,2,\ldots$).

Endi bir nechta misollar keltiramiz.

Misol $[0,n]$ oraliqdagi butun sonlarga mos keluvchi nuqtalar bo`yicha "daydib" yurgan zarrachaning xarakatini ko`raylik va "daydish" quyidagi sxema bo`yicha ro`y bersin:



ya`ni "zarracha" 0 va $n$ oralig'idagi ixtiyoriy $k$ nuqtadan "daydishini" boshlab, bir qadamda $p$ ehtimollik bilan o`ngga, $1-p$ ehtimollik bilan esa chapga siljiydi ($0 < p < 1$). Zarracha chekka nuqtalar 0 va n larga tushish bilan ulardan qaytib chiqmaydi. Bu "daydish" holatlar to`plami

$$S = \{0,1,\ldots,k-1,k,k+1,\ldots,n\}$$

bilan Markov zanjirini tashkil qiladi va uning uchun boshlang'ich taqsimot

$$p_i = 0,\ \ i \neq k,\ p_k = 1,$$

ya`ni $p = (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ ($k-$nchi joyda 1).

O`tish ehtimolliklari esa

$$p_{nl} = 0 \quad (l = 0,1,\ldots,n-1),\quad p_{0l} = 0 \quad (l = 1,\ldots,n),$$

$$p_{00} = 1,\ \ p_{nn} = 1,\ \ p_{l,l+1} = p,\ \ p_{l,l-1} = 1-p \quad (l = 1,\ldots,n-1)$$

Bu ehtimolliklar quyidagi o`tish matritsasini tashkil qiladi:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O`tish ehtimolliklari matritsasi

$$P = \left(P_{ij}\right)_1^s$$

bo`lgan Markov zanjiri

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots \qquad (9)$$

berilgan bo`lsin.

Markov zanjiri (9) ergodik xossaga ega deymiz, agar quyidagi limitlar

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j, \qquad j = 1, 2, \dots, s$$

mavjud bo`libgina qolmasdan, boshlang’ich holat $i$ ga bog’liq bo`lmagan holda limit qiymatlar $\left(\pi_1, \dots, \pi_s\right)$ ehtimollik taqsimotini tashqil qilsa, ya`ni

$$\pi_j \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{s} \pi_j = 1. \qquad (10)$$

Bu (10) taqsimot – ergodik taqsimot deb ataladi.

Quyidagi teorema ergodik Markov zanjirlari yetarli darajada katta sinfni tashkil etishini ifoda etadi.

Teorema (Ergodik teorema). Tasodifiy miqdorlar ketma –ketligi (9) holatlar to`plami $S = \{1, 2, \dots, s\}$ va o`tish ehtimolliklari matritsasi P bo`lgan Markov zanjiri bo`lsin.

A) Agar qandaydir n_0 uchun

$$\min_{i,j} P_{ij}^{(n_0)} > 0 \tag{11}$$

bo`lsa, shunday $\pi_1, \ldots, \pi_s$ sonlar topiladiki, ular uchun (10) munosabatlar o`rinli bo`lib, har bir $j \in S$ va har qanday $i \in S$ uchun

$$P_{ij}^{(n)} \to \pi_j, \quad n \to \infty \tag{12}$$

B) Aksincha, agar (10) va (12) munosabatlarni qanoatlantiruvchi $\pi_1, \ldots, \pi_s$ sonlar mavjud bo`lsa, (11) tengsizlik o`rinli bo`ladi.

C) (2) va (4) shartlarni qanoatlantiruvchi $(\pi_1, \ldots, \pi_s)$ sonlar

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{s} \pi_k p_{kj}, \qquad j = 1, \ldots, s \tag{13}$$

tenglamalar sistemasini yechimi bo`ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. М., УРСС.1999.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., УРСС. 2003.
3. Зубков А.М. Севостьянов Б.А. Чистяков В. П. Сборник задач по вероятностей М., “Наука”. 1989.
4. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей М., “Наука”. 2003
5. Ширяев А.Н. Вероятность-1,2. МЦНМО. 2004.
6. Sirojiddinov S.X. Mamatov M.M. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent. 1980.
7. Formanov Sh.Q. Ehtimollar nazariyasi. Toshkent. 2014.